Unidad 1: El conjunto de los números reales

- El conjunto de los números naturales está formado por aquellos números que se utilizan para contar.

  IN = {1, 2, 3, 4,…...}   IN0 = {0, 1, 2, 3, 4,……}

- El conjunto de los números enteros (Z) está formado por la unión del conjunto de los números naturales con el cero (IN0) y el conjunto de los números enteros negativos (Z^-) compuesto por los opuestos de los números naturales.

  Simbólicamente: Z = IN0 U Z^- = {….,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,….. }

- El conjunto de los números racionales (Q) se compone por todos los números que pueden ser expresados como cociente entre dos números enteros.

  Simbólicamente: $Q = \left\{\frac{a}{b}\ donde\ a, b \in Z\ y\ b \neq 0\right\}$

Los números enteros son racionales pues si $a \in Z$ puede representarse como $\frac{a}{1}$ entonces $Z \subset Q$.

Un mismo número racional admite infinitas formas de representación, algunas como fracción, otras en forma decimal.

Ej.: a) $\frac{5}{3} = 1,\hat{6} = \frac{50}{30} = \frac{10}{6} = \cdots$ b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = 0,25 = \cdots$

c) $-9 = -\frac{9}{1} = -\frac{18}{2} = -8,\hat{9} = \cdots$

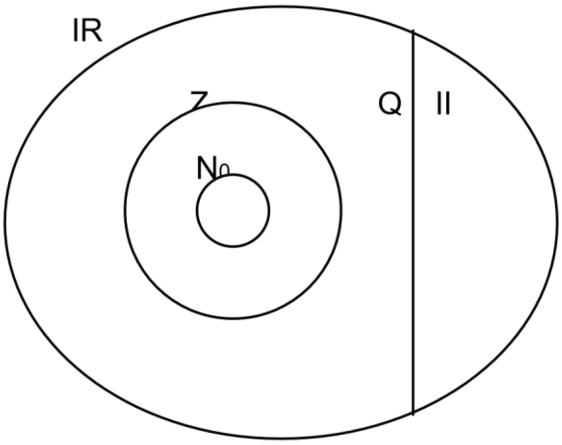
Pero la expresión decimal de un número racional tiene una cantidad finita de cifras decimales significativas o es periódica.

- El conjunto de los números irracionales (II) tiene por elementos a todos aquellos números que NO pueden ser expresados como cociente entre dos números enteros por tener infinitas cifras decimales no periódicas.

Ej: $\sqrt{2}$; e; $\sqrt[3]{5}$; π; $0,123456789101112 \ldots..$

- El conjunto de los números reales (IR) está formado por la unión del conjunto de los racionales con el conjunto de los irracionales.

Simbólicamente: IR = Q U II



Operaciones en IR: propiedades más usuales

Si a, b, c son números reales, entonces:

- a+b = b+a (la suma es conmutativa)
- a.b = b.a (el producto es conmutativo)
- a(b+c) = ab+ac (el producto es distributivo respecto a la suma)
- (a+b)+c = a+ (b+c) (la suma es asociativa)
- (ab)c = a(bc) (el producto es asociativo)

- $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$; $c \neq 0$ (el cociente es distributivo respecto a la suma)

- El 0 es el elemento neutro de la suma pues a+0 = 0+a = a
- El 1 es el elemento neutro de la multiplicación pues a.1 = 1.a = a
- $-a$ es el inverso aditivo u opuesto de todo n° real pues $a + (-a) = -a + a = 0$
- $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo de todo n° real $a \neq 0$ pues: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Potenciación

- $a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \ldots\ldots a}_{\text{n veces}}$ si a є IR, a≠0, n є IN
- Potencia de exponente cero: $a^0 = 1$

- Potencia de exponente negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Propiedades de la potenciación: (a є IR, a ≠ 0, m,n є Z)

- Potencia de otra potencia: $(a^n)^m = a^{n.m}$
- Producto de potencia de igual base: $a^n . a^m = a^{n+m}$
- Cociente de potencias de igual base: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- Distributividad respecto de la multiplicación: $(a . b)^n = a^n . b^n$
- Distributividad respecto de la división: $(a : b)^n = a^n : b^n$, $b \neq 0$
- NO es distributiva respecto a la suma ni a la resta: $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$

  Casos particulares: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

Radicación

$\sqrt[n]{a} = b$ (se lee: raíz enésima de a);
n se llama *índice* y cumple: n є IN, n > 1;
a se llama *radicando*
b se llama *raíz*
$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$

- Potencia de exponente racional:

  Si $a \in IR, a \geq 0, \quad m,n \in IN \rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Propiedades de la radicación

Son análogas a las de la potenciación. Si $a, b \in IR, m, n \in IN$

- Raíz de raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
- Distributividad respecto de la multiplicación: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$
- Distributividad respecto de la división: $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, $b \neq 0$
- Simplificación de índices: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$ (siendo $r \in IN$ un divisor común entre m y n)
- Eliminación del radical: $\sqrt[n]{a^n} = a \leftrightarrow n$ *es impar*

  $\sqrt[n]{a^n} = |a| \leftrightarrow n$ *es par*

Porcentaje

Una fracción cuyo denominador es 100 expresa un porcentaje o tanto por ciento.

Ej: $\frac{37}{100} = 0{,}37 = 37\%$

Se presentan distintos tipos de *problemas* dependiendo de cuál es la incógnita.

- ¿Qué tanto por ciento es 26 de 40?

Rta: $\frac{26}{40} = 0{,}65 = \frac{65}{100} = 65\%$

- Para calcular un porcentaje *de* una cantidad "a" , por ejemplo su 12% se debe resolver: $12\% \,.\, a$ o también $0{,}12.\,a$

- Para encontrar un número "x" tal que su 40% sea 2: $40\%\,.\,x = 2$ o sea $\frac{40}{100}\,.\,x = 2 \rightarrow x = \frac{200}{40} = 5$

Igualdades en IR. Ecuaciones

- Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. A los símbolos o letras que aparezcan se los denomina *incógnitas.*

  Ej: $5.(x-2) = 4{,}5.x + 9$

- *Resolver* una ecuación es encontrar los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Para ello, se aplican propiedades y/o se realizan pasajes de un miembro a otro de la igualdad. Con esos valores se forma el conjunto solución "S" de la ecuación.

  Ej: para resolver la ecuación anterior, se aplica propiedad distributiva en el primer miembro de la igualdad, obteniendo $5x - 10 = 4{,}5.x + 9$. A continuación se hacen pasajes de términos para escribir en un miembro de la igualdad los términos que contiene la incógnita y en el otro miembro los que no la tienen: $5x - 4{,}5x = 9 + 10$. Ahora, resolviendo en cada miembro: $0{,}5x = 19$. Nuevamente se realiza un pasaje (0,5 se pasa dividiendo) llegando así al valor de x que verifica la igualdad: $x = 38$, por lo tanto S = {38}

- Dos o más ecuaciones son *equivalentes* cuando tiene el mismo conjunto solución.

  Ej: la ecuación $x - 10 = 28$ es equivalente a la anterior porque su conjunto solución es el mismo: S = {38}

- Las ecuaciones se clasifican de la siguiente forma:
  - Cuando una igualdad es cierta para *algunos* valores de la incógnita, entonces es una ecuación **compatible determinada**.

Ej: a) $3x = 15$
$x = 5$
$S = \{5\}$

b) $x.(x - 3) = 0$
$x = 0 \quad o \quad x - 3 = 0$
$S = \{0,\ 3\}$

  - Cuando una igualdad es cierta para *todos* los valores de la incógnita, entonces es una ecuación **compatible indeterminada**.

Ej: a) $0x = 0$
Cualquier "x" por 0 da 0
$S = \{x \in IR\}$

b) $5(x + 2) = 10 + 5x$
$5x + 10 = 10 + 5x$
$0x = 0$
$S = \{x \in IR\}$

  - Si una igualdad no tiene soluciones, entonces es una ecuación **incompatible**

Ej: a) $0x = 8$
Ningún x por 0 da 8
S = { }

b) $4x + 3 = 4(x - 2)$
$4x + 3 = 4x - 8$
$4x - 4x = -8 - 3$
$0x = -11$
S = { }

Desigualdades en IR. Inecuaciones

- Entre dos números reales cualesquiera “a” y “b” se cumple: a < b ó a > b ó a = b
- Una *inecuación* es una relación de orden (menor, menor o igual, mayor, mayor o igual) entre dos expresiones algebraicas.
- *Resolver* una inecuación significa hallar, si existe, el conjunto “S” de valores de la incógnita para el cual es cierta la desigualdad.
- Los **intervalos reales** son otra manera de expresar conjuntos de números descriptos por desigualdades. Si a, b є IR y a < b se definen:

Nombre	Not. de intervalo	Notación de conjunto	Expresión coloquial	Representación gráfica
Intervalo abierto	(a,b)	$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}/\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$	Conjunto de números reales comprendidos entre a y b, sin incluir sus extremos	
Intervalo cerrado	$[a,b]$	$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}/\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$	Conjunto de números reales comprendidos entre a y b, incluyendo sus extremos	
Intervalos semiabiertos	1) $[a,b)$	$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}/\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$	Conjunto de números reales comprendidos entre a y b, incluyendo uno de sus extremos	
	2) $(a,b]$	$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}/\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$		
Intervalos infinitos	1) $(a,+\infty)$	$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}/\boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}\}$	1)2) Conjunto de números reales mayores o mayores o iguales que a. 3)4) Conjunto de números reales menores o menores o iguales que b.	
	2) $[a,+\infty)$	$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}/\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$		
	3) $(-\infty,b)$	$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}/\boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$		
	4) $(-\infty,b]$	$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}/\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$		
	5) $(-\infty,+\infty)$	$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}\}$		

Propiedades importantes al resolver inecuaciones

- Si a < b → a+c < b+c ∀ c є IR
- Si a < b → a.c < b.c ∀ c є IR^+
- Si a < b → a.c > b.c ∀ c є IR^-

Válidas para <, ≤, >, ≥

Ej: a) $\frac{1}{2} - 5x \geq \frac{3}{2}$

$$-5x \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$-5x \geq 1$$

$$x \leq 1 : (-5)$$

$$x \leq -0{,}2$$

$$x \in (-\infty;\ -0{,}2]$$

b) $(x-1).(x+9) < 0$

Para que un producto sea negativo (o menor que 0) hay dos posibilidades: -que el primer factor sea positivo y el segundo negativo ó

-que el primer factor sea negativo y el segundo positivo

$(x-1)>0\ y\ (x+9)<0$ ó $(x-1)<0\ y\ (x+9)>0$

$x>1\quad y\quad x<-9$ ó $x<1\ y\ x>-9$

$S_1 = (1,+\infty) \cap (-\infty,-9) = \{\ \}$ ó $S_2 = (-\infty,1) \cap (-9,+\infty) = (-9,1)$

$S = S_1 \cup S_2 =$ **(-9,1)**

<u>Módulo y distancia</u>

El *módulo* o *valor absoluto* de un número real "x" es la distancia en la recta numérica del punto x al origen de coordenadas.

<u>En símbolos</u>: $|x|$ se lee: "módulo de x"

Ej: $|3| = |-3| = 3$

<u>Definición</u>: Si x ϵ IR, su módulo o valor absoluto es:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Ej: a) $|-5| = -(-5) = 5\ pues -5 < 0$

b) $|\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2\ pues\ \sqrt{5}-2 \geq 0$

c) $|2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5}\ pues\ 2-\sqrt{5} < 0$

<u>Distancia entre dos números reales</u>

Se llama distancia entre dos números reales "x" e "y" cuya notación es $d(x,y)$ al número real: $|x-y|$

Es decir: $d(x,y) = |x-y| = |y-x|$ Caso particular: $d(x,0) = |x| = |-x|$

Propiedades del módulo

Si x e y son números reales y n entero, se verifica:

a) $|x| \geq 0$

b) $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$

c) $|x| = |-x|$

d) $|x.y| = |x|.|y|$

e) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$

f) $|x| = \sqrt{x^2}$ ó $|x|^2 = x^2$

g) $|x^n| = |x|^n$

Ecuaciones con módulo

Si k>0 entonces $|x| = k \leftrightarrow x = k$ ó $x = -k$

Ej: a) $|x + 2| = 4$

x+2 = 4 ó x+2 = - 4

x = 2 ó x = - 6

S = {2 , - 6}

b) $(x - 1)^2 - 4 = 0$

$(x - 1)^2 = 4$

$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{4}$

$|x - 1| = 2$ por propiedad f)

x – 1 = 2 ó x – 1 = - 2

x = 3 ó x = -1

S = {3 , -1}

Inecuaciones con módulo

Si x e y son números reales y k є IR^+ entonces:

1) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular)

2) $x^2 < y^2 \leftrightarrow |x| < |y|$

3) $|x| \leq k \leftrightarrow -k \leq x \leq k \rightarrow S = [-k, k]$

$|x| < k \leftrightarrow -k < x < k \rightarrow S = (-k, k)$

4) $|x| \geq k \leftrightarrow x \geq k$ ó $x \leq -k \rightarrow S = (-\infty, -k] \cup [k, +\infty)$

$|x| > k \leftrightarrow x > k$ ó $x < -k \rightarrow S = (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$

Ej: a) $|x-3| < 2$ (aplicando prop.3)

-2 < x – 3 < 2

-2+3< x – 3 + 3 < 2+3

1 < x < 5

S = (1,5)

b) $x^2 - 3 \geq 6$

$x^2 \geq 9$

$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{9}$

$|x| \geq 3$ (aplicando prop.4)

x ≥ 3 ó x ≤ - 3

S = (-∞,-3] U [3,+∞)