



UNIDAD N°2: Función - Función lineal

Una función f queda determinada por:

- Un conjunto A denominado *dominio* ($\text{Dom } f = A$).
- Un conjunto B denominado *codominio* ($\text{Codom } f = B$).
- Una ley que asocia a cada elemento del conjunto A *un único* elemento del conjunto B

En símbolos: $f : A \rightarrow B / y = f(x)$

Definición de dominio: el dominio de una función f es el conjunto de valores que toma la “ x ” (variable independiente).

Definición de imagen: la imagen de f es el subconjunto del codominio formado por todos los valores que toma la “ y ” (variable dependiente).

Ejemplo de cómo calcular el **dominio de una función**:

$g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ (analizamos que el denominador debe ser distinto de 0, entonces el dominio será el conjunto de los $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$).

Función inyectiva, suryectiva y/o biyectiva:

- Si a todo par de elementos distintos del dominio A le corresponden distintos elementos en el codominio B , entonces f es **inyectiva**.
- Si el conjunto imagen de f coincide con el codominio B , entonces f es **suryectiva**.
- Si f es simultáneamente inyectiva y suryectiva, entonces f es **biyectiva**.

Ej: la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2 - 5x^2$

No es inyectiva porque existen elementos distintos del dominio (por ejemplo 1 y -1) que se relacionan con el mismo elemento del codominio, ya que $f(-1) = f(1) = -3$.

No es suryectiva porque $\text{Im } f = (-\infty; 2]$ y $\text{Codom } f = \mathbb{R}$, es decir, $\text{Im } f \neq \text{Codom } f$.

$f(x)$ no es biyectiva por no ser inyectiva ni suryectiva.

Función inversa

Si $f: A \rightarrow B$ es una función biyectiva, se denomina *función inversa* de f a la función $f^{-1}: B \rightarrow A$

definida por: $f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$

- Las gráficas de una función y su inversa resultan simétricas respecto de la recta $y = x$

- Si una función no es biyectiva, se le puede encontrar la inversa, pero no será función. O también se puede restringir el dominio y/o el codominio para que sea biyectiva y de esa forma, la inversa sí será función.

Ej: Si se considera la función anterior $f(x) = 2 - 5x^2$ como $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty; 2]$, resulta suryectiva porque $\text{Im } f = \text{Codom } f$

Si se desea además que sea inyectiva, debe restringirse el dominio, por ejemplo, puede tomarse $\text{dom } f = [0; +\infty)$ (con este dominio, no hay valores de x distintos con igual imagen) Si se considera $f: [0; +\infty) \rightarrow (-\infty; 2]$, la función es biyectiva.

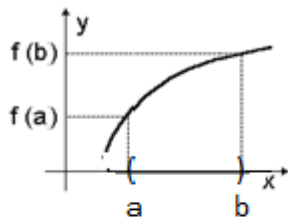
- ¿Cómo se halla la expresión analítica de la inversa de una función?

Ej: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = 4x - 3$ (función biyectiva)

Primero se intercambian las variables independiente y dependiente: $x = 4y - 3$

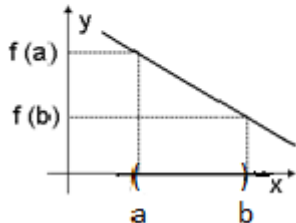
Luego se despeja la variable dependiente: $x + 3 = 4y \rightarrow \frac{x+3}{4} = y$ entonces la inversa es: $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f^{-1}(x) = y = \frac{x+3}{4}$

Función creciente y decreciente



Una $f: A \rightarrow B$ es **creciente** en un intervalo de su dominio, si se cumple que para todo par de números a y b del mismo:

$$a < b \rightarrow f(a) < f(b)$$



Una $f: A \rightarrow B$ es **decreciente** en un intervalo de su dominio, si se cumple que para todo par de números a y b del mismo:

$$a < b \rightarrow f(a) > f(b)$$

Extremos de una función

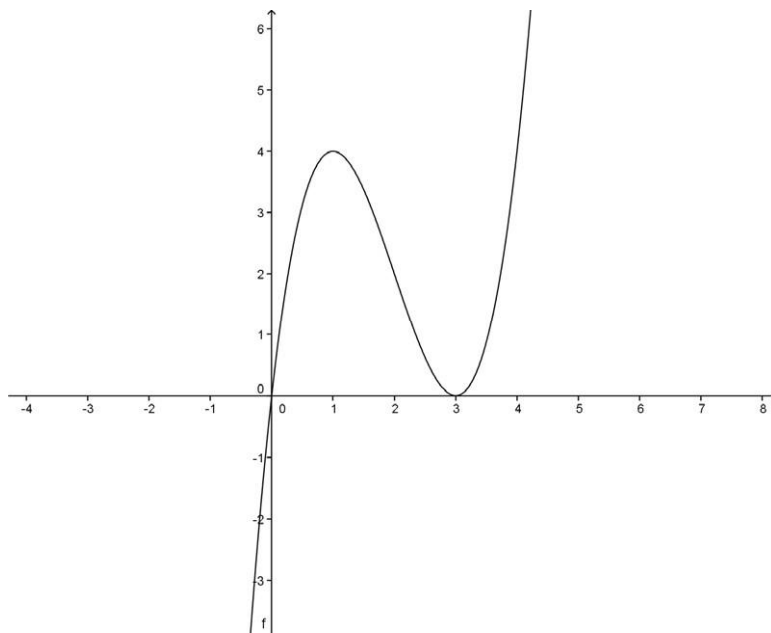
Se llama así a los máximos y mínimos relativos o absolutos de una función, los cuales se definen a continuación:

- Máximos y mínimos relativos (o locales)**

La función alcanza un **máximo relativo** en $x = x_0$ si $f(x_0)$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos próximos al valor x_0 .

La función alcanza un **mínimo relativo** en $x = x_0$ si $f(x_0)$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos próximos al valor x_0 .

Ej: El siguiente gráfico corresponde a la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$



$x = 1$ es la abscisa de un punto máximo relativo de f (o hay máximo relativo en el punto de coordenadas $(1,4)$).

$x = 3$ es la abscisa de un punto mínimo relativo de f (o hay mínimo relativo en el punto de coordenadas $(3,0)$).

- **Máximos y mínimos absolutos**

f alcanza un máximo absoluto en $x = x_0$ si $f(x_0)$ es mayor o igual que $f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de f .

f alcanza un mínimo absoluto en $x = x_0$ si $f(x_0)$ es menor o igual que $f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de f .

Ej:

Si se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ya graficada, no tiene ni máximos ni mínimos absolutos.

Pero si se cambia el dominio $\mathbb{R}$ por el conjunto $\text{Dom } f = [0,5; 5]$ la función sigue teniendo los mismos extremos relativos y además:

$x = 3$ es un mínimo absoluto

$x = 5$ es un máximo absoluto

Conjunto de ceros o raíces de una función

El conjunto de ceros de una función, que se escribirá C_0 , es el conjunto de puntos para el que la función vale cero, es decir, " x " es cero o raíz de una función si $f(x) = 0$

$$C_0 = \{x \in \text{Dom } f / f(x) = 0\}$$

Los ceros de una función pueden determinarse gráfica y/o analíticamente:

Gráficamente: basta ver la intersección de la curva con el eje x.

Analíticamente: se obtienen a través del planteo de una ecuación. Por ejemplo, si se desea determinar cuál/les son los ceros de la función $g(x) = x^2 - 4$ planteamos la ecuación $g(x) = 0$ y resolvemos:

$$\begin{aligned}g(x) &= x^2 - 4 = 0 \\x^2 &= 4 \\|x| &= \sqrt{4} \\|x| = 2 &\Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -2 \\C_0 &= \{-2; 2\}\end{aligned}$$

Conjuntos de positividad y de negatividad de una función

Las intersecciones de la gráfica de una función con el eje de abscisas, facilitan la determinación del intervalo (o *unión* de intervalos) en los cuales la función es **positiva** y los intervalos (o unión de intervalos) en los cuales es **negativa**.

- El **conjunto de positividad** (C_+) de una función $f(x)$ es el subconjunto del dominio formado por **los x** para los cuales **las imágenes son números positivos**.

$$C_+ = \{x \in \text{Dom } f / f(x) > 0\}$$

- El **conjunto de negatividad** (C_-) de una función $f(x)$ es el subconjunto del dominio formado por **los x** para los cuales **las imágenes son números negativos**.

$$C_- = \{x \in \text{Dom } f / f(x) < 0\}$$

Para hallar C_+ y C_- en forma analítica, se deben resolver las siguientes inecuaciones: **$f(x) > 0$ y $f(x) < 0$** .

Ej: Para determinar los conjuntos de positividad y de negatividad de: **$f(x) = 4x + 8$** planteamos las inecuaciones y resolvemos:

$$\begin{aligned}C_+ : f(x) > 0 &\Rightarrow 4x + 8 > 0 \\&\Rightarrow 4x > -8 \\&\Rightarrow x > -2\end{aligned}$$

$$\text{Solución: } C_+ = (-2, \infty)$$

$$\begin{aligned}C_- : f(x) < 0 &\Rightarrow 4x + 8 < 0 \\&\Rightarrow 4x < -8 \\&\Rightarrow x < -2\end{aligned}$$

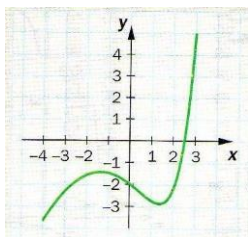
$$\text{Solución: } C_- = (-\infty, -2)$$

Continuidad (idea intuitiva)

Una función es continua cuando puede trazarse su gráfica “sin levantar el lápiz”.

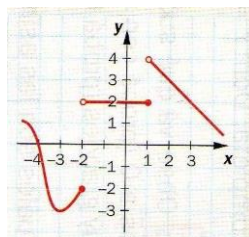
Ej:

a)



Continua para todo $x \in \mathbb{R}$

b)



Discontinua en $x = -2$ y $x = 1$

Función lineal

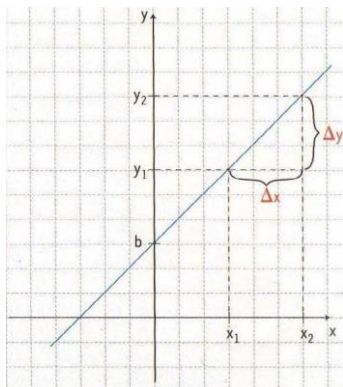
Si una función es de la forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$, su gráfico es una recta y se llama función lineal.

- El número “m” se llama *pendiente* e informa sobre la inclinación de la recta.

Se define como el cociente entre la variación de la variable dependiente (Δy) y la variación de la variable independiente (Δx), de cualquier par de puntos pertenecientes a la recta. Si esos

puntos son $p(x_1, y_1)$ y $q(x_2, y_2)$, entonces: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, si $x_1 \neq x_2$

(si $x_1 = x_2$, no existe “m” y la recta es vertical)



- El número “b” se llama *ordenada al origen* y es el valor que toma la función para $x = 0$. El punto **(0; b)** es el punto de intersección entre la recta y el eje de ordenadas.
- Si $m = 0 \Rightarrow y = b$ es la ecuación de una *recta horizontal*.

Cuando se buscan los ceros o raíces de una función lineal $y = mx + b$, se resuelve la ecuación $mx + b = 0$ llamada *ecuación de primer grado*.

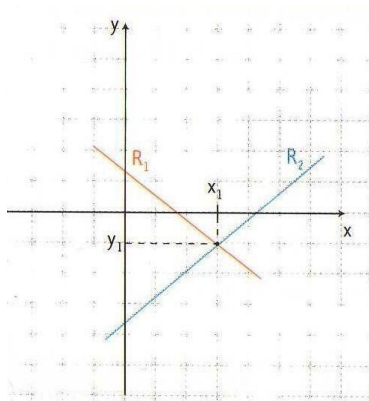
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Dadas las rectas $R_1: y = m_1x + b_1$ y $R_2: y = m_2x + b_2$ forman el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$$

Resolver el sistema significa encontrar los puntos del plano (x,y) que tienen en común R_1 y R_2 .

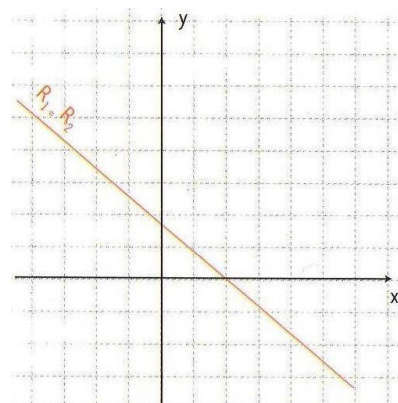
Interpretación gráfica de los casos posibles

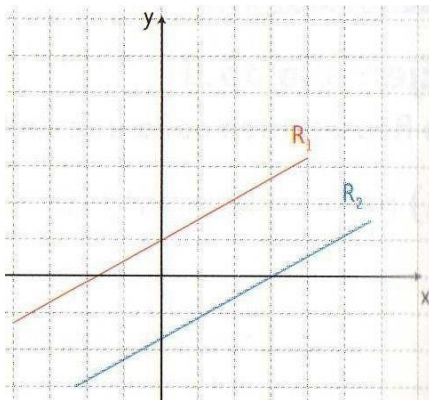


$$R_1 \cap R_2 = (x_1, x_2)$$

La solución es única
El sistema es *compatible determinado*

$R_1 = R_2$
Las rectas son coincidentes
Hay infinitas soluciones
Sistema *compatible indeterminado*





$R_1 \cap R_2 = \{ \}$
 Las rectas son paralelas no coincidentes
 No existe ninguna
 solución El sistema es
incompatible

Método gráfico de resolución

Se grafican ambas rectas en el mismo sistema de coordenadas y se busca el punto de intersección, si existe.

Métodos analíticos de resolución

▪ Método de igualación

- 1º) Se despeja *la misma* incógnita en ambas ecuaciones
- 2º) Se igualan las expresiones obtenidas
- 3º) Se resuelve la ecuación de primer grado que resulta
- 4º) Se averigua la incógnita que falta sustituyendo el valor hallado en el paso 3º) en cualquiera de las ecuaciones del paso 1º)

▪ Método de sustitución

- 1º) Se despeja *una* incógnita en *una* de las ecuaciones
- 2º) Se sustituye la expresión obtenida en el paso 1º) en la ecuación aún no utilizada
- 3º) Se resuelve la ecuación de primer grado resultante
- 4º) Se averigua la incógnita que falta sustituyendo el valor hallado en el paso 3º) en la ecuación del paso 1º)

Función por tramos

Es una función que utiliza varias expresiones para su definición, utilizando cada una de ellas en un determinado tramo del dominio de definición de la función principal.

$$\text{Ej: } f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Es una función por tramos, ya que para un intervalo del dominio $(-\infty, 1]$ la imagen se define de una manera ($f(x) = x - 1$) y para otro intervalo $(1, +\infty)$ se define de otra forma ($f(x) = 3 - 2x$). El gráfico es el siguiente:

