

- **Multiplicación:** - para multiplicar dos monomios, se deben multiplicar los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando regla de signos y la propiedad de la potenciación $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.
- para multiplicar polinomios se aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta.

Productos especiales:

$$\begin{array}{ll} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & \text{Cuadrado de un binomio} \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \text{Cubo de un binomio} \\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 & \text{Producto de binomios conjugados} \end{array}$$

- **División:** para dividir polinomios, se usa un procedimiento similar al de la división entera de números enteros.

$$\begin{array}{ccccc} \text{dividendo} & \longleftarrow & P(x) & \overline{) Q(x)} & \longrightarrow \text{divisor } (Q(x) \neq 0) \\ & & R(x) & C(x) & \\ & \longleftarrow & \text{resto} & & \longrightarrow \text{cociente} \end{array}$$

Siempre se cumple que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ y además:

- El resto tiene menor grado que el divisor o bien es el polinomio nulo.
- El grado de $C(x)$ es la diferencia entre los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.
- Si $P(x)$ es el polinomio nulo o su grado es menor que el de $Q(x)$, el cociente es el polinomio nulo y el resto es igual al dividendo.

Algoritmo de la división:

- Para dividir monomios se deben dividir los coeficientes y las indeterminadas, aplicando regla de signos y la propiedad de la potenciación $x^n : x^m = x^{n-m}$
- Para dividir dos polinomios se siguen estos pasos:
 - 1º) Se ordena en forma decreciente dividendo y divisor, y se completa el dividendo.
 - 2º) Se divide el 1º término del dividendo por el 1º término del divisor, el resultado es el término de mayor grado del cociente.
 - 3º) Se multiplica ese resultado por cada término del divisor y dicho producto se resta al dividendo.
 - 4º) Se reinicia el proceso a partir del resultado de la última resta (o suma del polinomio opuesto).

Observación: si al dividir $P(x)$ por $Q(x)$ se obtiene cociente $C(x)$ y $R(x) = 0$ decimos que:

- la división es exacta $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$

- $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$
- $P(x)$ es divisible por $Q(x)$
- $Q(x)$ es divisor de $P(x)$
- $Q(x)$ divide a $P(x)$

Regla de Ruffini:

Es un método abreviado para hacer la división, usando solo los coeficientes de los polinomios. Se puede utilizar cuando el divisor es de la forma $x - a$, $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Para hacer $(2x^3 - 3x + 4) : (x + 1)$ se procede así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & & -2 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & 5 \end{array} \rightarrow \text{RESTO}$$

$$C(x) = 2x^2 - 2x - 1$$

- El coeficiente principal se "baja" sin modificarlo y luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente (TI) del divisor y se suma con el 2º coeficiente y así sucesivamente.
- Los números así obtenidos son los coeficientes del cociente y el ultimo valor es el resto.
- El polinomio cociente es un grado menor que el dividendo.

Teorema del resto

El resto de dividir un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $(x-a)$ coincide con $P(a)$.

Consecuencias del teorema del resto:

- Un polinomio $P(x)$ es divisible por $x - a \Leftrightarrow a$ es raíz de $P(x)$
- Si $x_1, x_2, \dots, x_i$ son las raíces reales del polinomio $P(x)$, entonces existe otro polinomio $M(x)$ tal que: $P(x) = M(x) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_i)$
- Un polinomio de grado "n" tiene a lo sumo "n" raíces reales.

Teorema de Gauss

Si una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, entonces p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal (CP).

Factorización de polinomios

- Polinomio primo: un polinomio de grado n mayor o igual que 1 es primo o irreducible si no puede ser expresado como producto de polinomios de grado menor que n.
- Polinomio compuesto: un polinomio que no es primo se dice compuesto.

Ejemplos: $2x - 6 = 2(x - 3)$ primo
 $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$ compuesto

Un polinomio está factorizado cuando se lo expresa como producto entre su coeficiente principal y polinomios primos mónicos.

Ejemplos: $P(x) = x^3 + 4x + 5$ para factorizarlo puede procederse así:

1°) Buscar una raíz de : $P(x)$, en este caso, usaremos Teorema de Gauss

Divisores del TI (5): $\pm 1; \pm 5$

Divisores del CP (1): ± 1

Posibles raíces: $\pm 1; \pm 5$

$$P(1) \neq 0$$

$$P(-1) = 0 \rightarrow -1 \text{ es raíz de } P(x)$$

2°) Según consecuencia del teorema del resto, si -1 es raíz de $P(x) \rightarrow x + 1$ es divisor de $P(x)$.

3°) Dividamos $P(x)$ por $x + 1$ empleando Ruffini

	1	0	4	5
-1		-1	1	-5
	1	-1	5	0

$$\text{Entonces } P(x) : (x + 1) = x^2 - x + 5$$

4°) Escribamos a $P(x)$ como producto entre el divisor del paso 2°) y el cociente del paso 3°)

$$P(x) = (x^2 - x + 5) \cdot (x + 1)$$

Aclaración: $(x+1)$ es primo, habría que ver si $(x^2 - x + 5)$ es primo o compuesto; si fuese compuesto debe seguir factorizándose. Para ello pueden ser útiles otros casos de factorización:

- Factor común: es lo contrario de aplicar propiedad distributiva
Se extrae el factor que se repite en todos los términos del polinomio

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- de la indeterminada: ésta con el menor exponente} \\ \text{- de los coeficientes: el máximo común divisor o el coeficiente principal si se desea un polinomio mónico} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Ejemplo: } 12x^3 - 30x^2 + 48x^5 &= 6x^2 (2x - 5 + 8x^3) \\ &= 48x^2 \underbrace{\left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{8} + x^3 \right)}_{\text{polinomio mónico}} \end{aligned}$$

- Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- Trinomio cuadrado perfecto: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- Cuatrinomio cubo perfecto: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
- Trinomio de 2º grado: $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
 $a \neq 0, x_1$ y x_2 raíces de $P(x)$.