Unidad 5: Función racional

Expresiones algebraicas racionales

Así como se define a los números racionales como los números de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros ($b \neq 0$), se define como expresiones racionales a aquellas cuya forma es $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios y Q(x) no es el polinomio nulo.

Simplificación de expresiones racionales

Es posible simplificar una expresión racional cuando existen factores comunes al numerador y al denominador, de lo contrario, la expresión racional es *irreducible*.

Ej: Consideremos la expresión racional $\frac{2x^2+2x-4}{x^3+3x^2-4}$. Una vez factorizados su numerador y su denominador, se puede expresar así: $\frac{2(x+2)\ (x-1)}{(x+2)^2(x-1)}$ y luego de simplificar todos los factores comunes, se obtiene $\frac{2}{x+2}$. Debe tenerse en cuenta que la simplificación realizada es válida para todo número real excepto para aquellos que anulen los factores simplificados. En este ejemplo, se simplificaron los factores x+2 y x-1 los cuales resultan iguales a cero respectivamente para -2 y 1, por lo tanto la simplificación realizada vale $\forall x \in IR - \{-2,1\}$

Función racional

Una función racional responde a la forma $f: A \to IR / f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

- <u>Dominio</u>: el dominio A de la función racional es el conjunto de todos los valores de la variable que no anulan al denominador.

  Ej: El dominio de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3}$ $es\ IR - \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

- <u>Raíces</u>: las intersecciones del gráfico de una función racional f(x) con el eje x se producen para los valores de x que anulan la función, es decir para aquellos que anulan al numerador y pertenecen al dominio de f. Esos valores de x, si existen, son los ceros o raíces de f(x).

  Ej: para hallar las raíces de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)^2}$ cuyo dominio es Dom (f) = IR – {-1}, se debe resolver la ecuación f(x) = 0, es decir:

  $$\frac{x^2 - 1}{(x+1)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 = 0.(x+1)^2 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \text{ ó } x = -1$$

  De los valores hallados debe descartarse el -1 por no pertenecer al dominio de la función, por lo tanto, el conjunto de ceros de f es $C_0 = \{1\}$.

- <u>Asíntotas verticales</u>: si a ϵ IR es un cero del denominador de una función racional f(x) pero no anula al numerador, entonces la recta de ecuación x = a es una asíntota vertical de f(x).

  Ej : la función $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 9}$ tiene una sola asíntota vertical que es x = 3. No hay asíntota vertical en x = -3 porque, si bien -3 anula al denominador de f(x), también anula al numerador.

- <u>Asíntotas horizontales</u>: para hallar las asíntotas horizontales de una función racional $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, puede utilizarse el siguiente esquema:

Grados	Asíntota horizontal
1) gr (P(x)) < gr(Q(x))	y=0
2) gr (P(x)) = gr(Q(x))	$y=\frac{coeficiente\ principal\ de\ P(x)}{coeficiente\ principal\ de\ Q(x)}$
3) gr (P(x)) > gr(Q(x))	No tiene

Ej: la asíntota horizontal de la función $f(x)=\frac{8-5x}{2x-1}$ *es* $y=-\frac{5}{2}$ porque los polinomios numerador y denominador son del mismo grado, entonces se aplica el caso 2).

<u>Construcción del gráfico de una función racional</u>

Para graficar una función racional f(x), se pueden seguir estos pasos:

1°) Se indica el dominio de f(x) a partir de su fórmula original.

2°) Se estudia si la expresión racional de f(x) es reducible. Si no lo es, se pasa al paso 3°). En caso de ser reducible, se simplifica obteniendo la expresión de una *nueva función s(x)*. Se indica su dominio. A partir del gráfico de s(x) se obtiene el gráfico de f(x): el gráfico de f(x) es idéntico al de s(x) **excepto** *en los valores de x que pertenecen al dominio de s(x) pero no al de f(x)*. En esos valores de x, el gráfico de f(x) tiene "agujeros".

3°) Se analiza si la función tiene asíntotas verticales. En caso de que existan, se escriben sus ecuaciones y se trazan en el gráfico con una línea punteada.

4°) Se analiza si la función tiene asíntota horizontal. Si existe, se escribe su ecuación y se traza en el gráfico con una línea punteada.

5°) Se puede construir una tabla de valores dándole a "x" algunos valores anteriores y otros posteriores a cada asíntota vertical.

6°) Se traza el gráfico de f(x) de modo que la curva pase por los puntos marcados y se aproxime a las asíntotas, si es que existen.

Ej 1: $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$

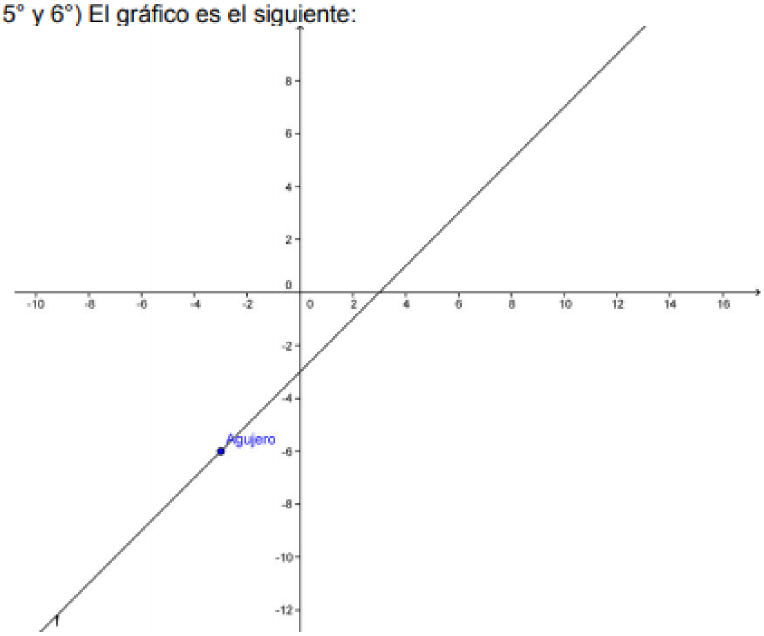
1°) El dominio es dom (f) = IR – {-3}

2°) La función es reducible y luego de simplificarla se obtiene la nueva función s(x) = x – 3 cuyo dominio es dom (s) = IR. Como x = -3 pertenece al dominio de s pero no al de f, en ese punto hay un "agujero". Las coordenadas del agujero son (-3,s(-3)) = (-3,-6)

3°) f(x) no tiene asíntota vertical porque x = -3 que anula al denominador, también anula al numerador.

4°) f(x) no tiene asíntota horizontal ya que el grado del numerador es mayor que el del denominador.

5° y 6°) El gráfico es el siguiente:



Ej 2: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)^2}$

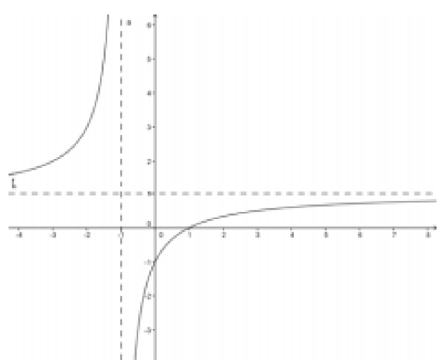
1°) El dominio es dom (f) = IR – {-1}

2°) La función es reducible y luego de simplificarla se obtiene la nueva función $s(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ cuyo dominio es dom (s) = IR – {-1} . Como los dominios no tienen valores donde difieran, la función f(x) no tiene agujeros.

3°) f(x) tiene asíntota vertical en x = -1 porque si bien -1 anula al numerador y al denominador, luego de simplificar, el -1 sigue anulando al denominador (y no al numerador); esto se debe a la multiplicidad 2 de la raíz -1 en el denominador.

4°) La asíntota horizontal es y = 1

5° y 6°) El gráfico es el siguiente:



Ecuaciones racionales

Una ecuación racional es una ecuación que puede escribirse de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, Q(x) ≠ 0.

Cuando se buscan los ceros o raíces de una función racional, se está resolviendo una ecuación racional.

Ej: $\frac{x-4}{x^2-5x} = \frac{2}{x^2-25}$ es una ecuación racional. Para resolverla, primero puede realizarse un pasaje de términos: $\frac{x-4}{x^2-5x} - \frac{2}{x^2-25} = 0$ y ahora se factorizan los denominadores para obtener: $\frac{x-4}{x(x-5)} - \frac{2}{(x+5)(x-5)} = 0$. Para poder restar, se busca el común denominador que es x(x+5)(x-5) y se opera: $\frac{(x-4)(x+5)-2x}{x(x+5)(x-5)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-20-2x}{x(x+5)(x-5)} = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2-x-20}{x(x+5)(x-5)} = 0$ (*) En este paso se puede apreciar que tiene la forma de una ecuación racional: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. Resolver esta ecuación es como buscar los ceros de la siguiente función

$f(x) = \frac{x^2-x-20}{x(x+5)(x-5)}$, que se llama *función racional asociada* a la ecuación. Su *dominio* es Dom (f) = IR – { 0, -5, 5 }. Si al resolver la ecuación se obtiene como resultado algún valor no perteneciente al dominio de la función racional asociada, debe descartarse del conjunto solución.

Volviendo a (*), se resuelve como ya se mostró en el ejemplo de cálculo de raíces de una función racional:

$\frac{x^2-x-20}{x(x+5)(x-5)} = 0 \Rightarrow x^2-x-20 = 0 \Rightarrow$ resolviendo la ecuación con fórmula resolverte se obtienen las soluciones $x_1 = 5$ ó $x_2 = -4$ de las cuales se descarta el 5 porque no pertenece al dominio de la función racional asociada, entonces S = {-4}