Unidad 6: Función exponencial y logarítmica

Función exponencial

Se denomina función exponencial a toda función de la forma:

$$f: IR \rightarrow IR \,/\, f(x) = k.a^x \quad \text{con } a \in IR^+ - \{1\} \quad y \quad k \in IR - \{0\}$$

- Si k = 1 se obtiene $f(x) = a^x$

Características:

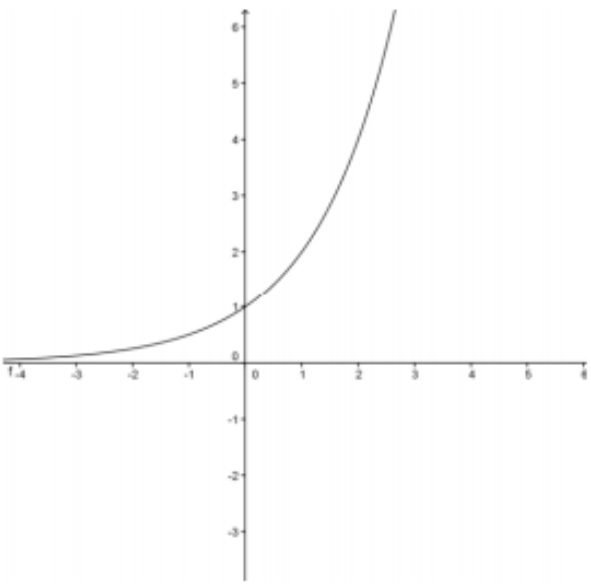
- f(0) = 1
- f(1) = a
- Tiene asíntota horizontal en y = 0
- Dom f = IR
- Im f = IR^+
- f es continua en todo su dominio

Para estas funciones se distinguen dos casos:

1) 0 < a < 1

La función resulta *decreciente*.

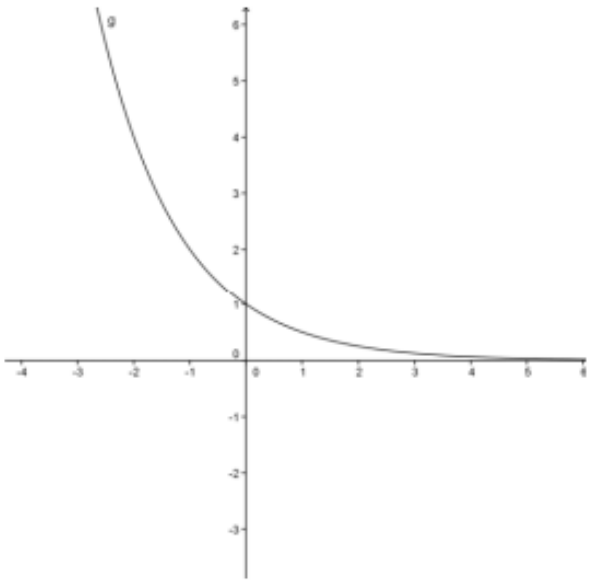
Ej: el gráfico de $f(x) = 2^x$ es el siguiente:



2) a > 1

La función resulta *creciente*.

Ej: el gráfico de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es el siguiente:



- Si k = 1 y a = e se obtiene $f(x) = e^x$ llamada *función exponencial natural*

El número e es irracional y dado que $2 < x < 3$, la gráfica de $f(x) = e^x$ quedará comprendida entre los gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ con características similares.

Logaritmación

La logaritmación es una operación entre dos números reales "a" y "b" llamados *base* y *argumento* respectivamente, que se define como:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \text{ con } a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \text{ y } b \in \mathbb{R}^+$$

Ej: 1) $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

2) $\log_2 \frac{1}{4} = -2 \Leftrightarrow 2^{-2} = \frac{1}{4}$

3) $\log_9 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

Existen dos logaritmos cuya notación es especial: el *decimal* o de base 10, que se simboliza $\log_{10} b$ = **log b**; y el **natural** o de base e que se simboliza $\log_e b$ = **ln b**

Propiedades de la logaritmación

Para $a,c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$; $x,y,b \in \mathbb{R}^+$

- $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$
- $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$
- $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

  Ej: log (100.100) = log 100 + log 100
  log (10000) = 2 + 2
  4 = 4

- $\log_a (x:y) = \log_a x - \log_a y$

  Ej: $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 1 - \log_2 8$
  -3 = 0 – 3
  -3 = -3

- $\log_a b^n = n.\log_a b$

  Ej: $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3.\log_5 5 = 3.1 = 3$

- $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \Rightarrow a^{\log_a b} = b$

  Ej: $e^{\ln 5} = 5$

- Para calcular logaritmos en los cuales el argumento no es potencia de la base, se debe recurrir a un *cambio de base*, utilizando logaritmos con base convenientes o logaritmos decimales o naturales, los cuales pueden resolverse con calculadora científica:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Ej: 1) $\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{2}{3}$ 2) $\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} \cong \frac{0{,}477}{0{,}699} \cong 0{,}682$

Función logarítmica

Sea f: $IR^+ \rightarrow IR$ se llama función logarítmica de base "a" a la función inversa de la exponencial, definida por:

$$\mathbf{f(x) = \log_a x} \quad \text{con a } \epsilon\ IR^+ - \{1\}$$

Ejemplos:

- Si f: $IR \rightarrow IR^+$ / $f(x) = 10^x \Rightarrow f^{-1}(x)$: $IR^+ \rightarrow IR$ / $f^{-1}(x) = \log x$

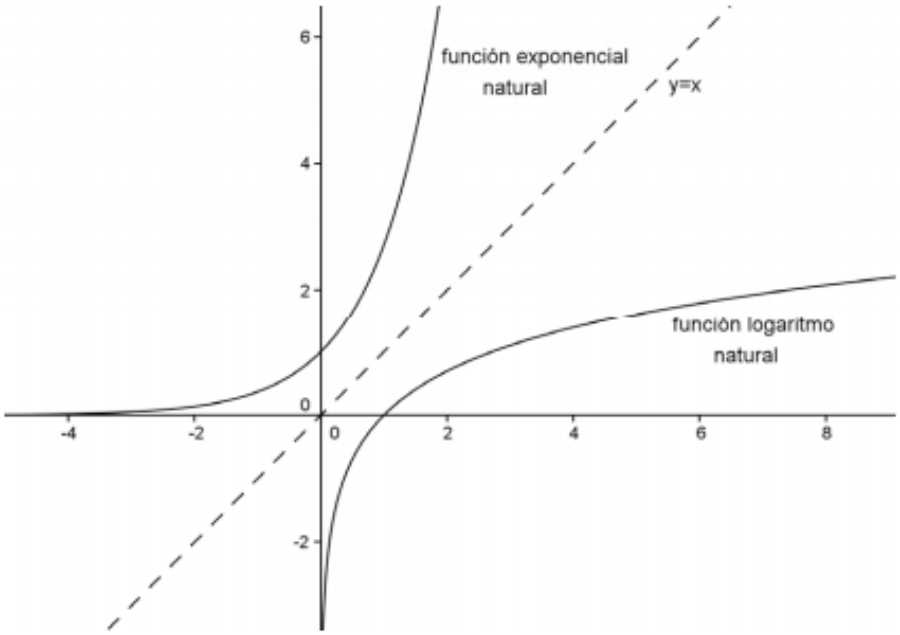
- Si f: $IR \rightarrow IR^+$ / $f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x)$: $IR^+ \rightarrow IR$ / $f^{-1}(x) = \ln x$

A continuación se muestra el gráfico de la función exponencial natural $f(x) = e^x$ y el de la función logaritmo natural $f^{-1}(x) = \ln x$.

Para realizar la tabla de valores de la función inversa, una vez hecha la de la función, pueden intercambiarse las abscisas y las ordenadas entre sí. Ya se vio que el punto de coordenadas (0,1) pertenece a $f(x) = e^x$, entonces el punto (1,0) pertenece a $f^{-1}(x) = \ln x$.

Los gráficos de $f(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = \ln x$ (como siempre que se grafique una función y su inversa) resultan simétricos respecto a la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante (y = x).

En gráfico anterior se observó que y = 0 es asíntota de la función exponencial, se puede observar en este gráfico que x = 0 es asíntota vertical de y = ln x (válido para todo "a")



Ecuaciones exponenciales

Una ecuación es *exponencial* cuando la incógnita de la misma forma parte de algún exponente. Para resolver una ecuación exponencial, se debe tener presente que:

a) Siempre que sea posible, es conveniente expresar ambos miembros como potencias de una misma base y tener en cuenta la propiedad: $a^m = a^n \Rightarrow m = n$, $a \in IR - \{0, 1, -1\}$
b) Se puede aplicar la logaritmación de igual base en ambos miembros de la igualdad.

Ej:

1) Para hallar el valor de "x" tal que f(x) = 16, siendo $f(x) = 2^x$, se debe plantear la ecuación $2^x = 2^4 \Rightarrow$ **x = 4** (se aplicó la propiedad mencionada en a)).

2) Para resolver la ecuación $2^{x-1} = 3$, como no es posible expresar ambos miembros en una misma base, se aplica logaritmación de base 10 (puede ser en otra base) miembro a miembro de la igualdad: $\log 2^{x-1} = \log 3 \Rightarrow (x-1).\log 2 = \log 3$ (se aplicó la propiedad $\log_a b^n = n.\log_a b$)
$x - 1 = (\log 3):(\log 2) \Rightarrow x - 1 \cong 1{,}585 \Rightarrow$ **x ≅ 2,585**

3) En la ecuación $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9^{x-2}$ primero se expresan ambos miembros con potencias de base 3: $(3^{-1})^{2x} = (3^2)^{x-2}$ y ahora se aplica la propiedad potencia de otra potencia, obteniendo:
$3^{-2x} = 3^{2(x-2)}$ teniendo en cuenta la propiedad a), se igualan los exponentes:
$-2x = 2(x - 2)$ de donde $-2x = 2x - 4 \Rightarrow -4x = -4 \Rightarrow$ **x = 1**

Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación es *logarítmica* cuando la incógnita se encuentra en el argumento de algún logaritmo.
Para resolverlas, se debe tener presente que:

a) Se puede aplicar la definición de logaritmo para despejar la incógnita.
b) Siempre que sea posible, conviene agrupar los logaritmos en uno solo, empleando propiedades.
c) Solo existen logaritmos de números positivos, por lo cual deben descartarse del conjunto solución aquellos valores que no verifiquen la ecuación original.

Ej:

1) $\log_2 (x - 3) = -1 \Rightarrow 2^{-1} = x - 3 \Rightarrow \frac{1}{2} = x - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{7}{2}}$

2) $\log_3 (x + 4) + \log_3 (x - 4) = 2 \Rightarrow \log_3 [(x + 4).(x - 4)] = 2 \Rightarrow \log_3 (x^2 - 16) = 2 \Rightarrow$
$3^2 = x^2 - 16 \Rightarrow 9 + 16 = x^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{25} \Rightarrow x = \pm 5$

De ambas soluciones debe descartarse x = -5 por no verificar la ecuación original dado que se obtienen logaritmos de argumento negativo, sin solución. Entonces: **S = {5}**

3) $\log (2x + 1) = \log (x + 3)$

Como en una función logarítmica, dos valores distintos del dominio siempre tienen imágenes distintas, en la ecuación, los logaritmos de igual base sólo pueden ser iguales si los argumentos lo son: $2x + 1 = x + 3 \Rightarrow$ **x = 2**

4) $\log_2 x - \log_4 x = 1$

Como hay logaritmos de distinta base, es necesario aplicar cambio de base en alguno de los logaritmos. En este caso, se reemplazará el de base 4 por: $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$

Volviendo a la ecuación:

$\log_2 x - \frac{\log_2 x}{2} = 1 \Rightarrow \log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2 x = 1 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Rightarrow 2^2 = x \Rightarrow$

x = 4